Übungsblatt 9

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie II

Klassische Feldtheorie
SS 2019

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie λ in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{p}}^{\mathrm{D}} = \lambda\sigma^{\mathrm{D}}$$

der *Prandtl-Reuss*-Theorie aus der Plastizitätsbedingung $f = 0$, dem *Hookeschen* Gesetz für Raten und Deviatoren

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma^{\mathrm{D}} = 2G\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{D}}$$

dem *Hooke*schen Gesetz für Volumendehnung

$$\mathrm{Tr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma = 3K\mathrm{Tr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{e}}$$

und dem elastisch-plastischen Tangentenmodul für linear-elastisch-plastisches Materialverhalten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Zeigen Sie: Das *Hooke*sche Gesetz für die Raten lautet
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{e}}\right)\mathbf{1} + 2G\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{e}}. \tag{1}$$

2. Ersetzen Sie in Gleichung (1) die elastischen Verzerrungsinkremente in der Form
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{p}} \tag{2}$$
und benutzen Sie die Fließregel
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon_{\mathrm{p}} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma}. \tag{3}$$

3. Verjüngen Sie das Ergebnis aus 2. mit der Ableitung der Fließfunktion nach der Spannung. Lösen Sie nach λ auf.

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**

Betrachten Sie die Hauptgleichung der linearen Elastizitätstheorie (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 8) und zeigen Sie, dass bei einer konstanten Volumenkraftdichte jede Lösung $\mathbf{u}$ die biharmonische Gleichung $\Delta\Delta\mathbf{u} = 0$ erfüllt. Gilt auch der Umkehrschluss?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\Delta\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**

Bei Erdbebenwellen kommen zwei Wellentypen vor: Longitudinalwellen und Scherwellen (Transversalwellen). In der obersten Erdschicht unterscheidet man zwischen Oberflächenwellen und Love-Wellen, wobei beide vom Scherwellentyp sind. Love-Wellen treten in einer unendich ausgedehnten Schicht endlicher Dicke auf (z.B. der obersten Erdschicht). Die Welle schwingt dabei parallel zur Schichtgrenze und beide Berandungsflächen sind von Bedeutung. Es liegt ein Wellenleiter vor. Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma, \tag{4}$$

für die wir fortschreitende Wellen als Lösungen suchen.

1. Die oberste Erdschicht mit endlicher Dicke H liege in der (x, y)-Ebene. Wir können annehmen, dass unsere Wellen in x-Richtung laufen. Das Verschiebungsfeld zeigt dann in y-Richtung, das heißt $u_x = u_z = 0$ und $u_y = v(x, z, t)$, wobei wir eine Abhängigkeit von der Ortskoordinate y vernachlässigen. Welche Bewegungsgleichung für $v(x, z, t)$ folgt aus Gleichung (4) wenn man für σ die Spannungs-Dehnungsrelation eines isotropen elastischen Körpers verwendet?

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes

$$v = g(z) \sin(kx - \omega t), \tag{5}$$

der eine in x-Richtung fortlaufende Welle mit z-abhängiger Amplitude darstellt. Sie erhalten eine Differentialgleichung für $g(z)$. Bestimmen Sie die freien Parameter in Ihrer Lösung mit Hilfe der folgenden Randbedingungen: der Spannungsvektor verschwinde an der Oberfläche ($z = 0$) und die Verschiebung am Boden des Wellenleiters ($z = -H$) sei Null.

3. Sie werden feststellen, dass aufgrund der Randbedingungen ω and k durch die sogenannt Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ miteinander verknüpft sind. Skizzieren Sie die Dispersionsrelation und diskutieren Sie sie. Welche Bedeutung hat $c = \sqrt{\mu/\rho}$? Fallen Ihnen ähnliche Wellentypen aus anderen Bereichen der Physik ein?