Universität Stuttgart – Institut für Computerphysik

# Klausur

## Physik auf dem Computer SS 2012

JP Dr. Axel Arnold    Dr. Olaf Lenz    Florian Fahrenberger
Dominic Röhm

15. August 2012

| | |
|---|---|
| **Name** | |
| **Vorname** | |
| **Matrikelnummer** | |

### Hinweise

- In der Regel gibt der verfügbare freie Platz einen Hinweis darauf, welchen Umfang die Lösung haben sollte.
- Lies Dir *alle* Fragen am Anfang durch, bevor Du anfängst, sie zu beantworten.
- Falls der Platz nicht ausreichen sollte, verwende zusätzliche Blätter. Beschrifte diese unbedingt mit Deinem Namen und Matrikelnummer!
- Die Maximalpunktzahl ist 100.
- Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte notwendig.

# Viel Erfolg!

# 1 Lineare Algebra I (7 Punkte)

**Aufgabe 1:** (1 Punkt)
Nenne einen Vorteil der Spaltenpivotwahl gegenüber der kanonischen Pivotwahl bei der Gaußeliminiation einer quadratischen Matrix?

**Antwort:**

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)
Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung und Rücksubstitution.

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 & 6 \\ -8 & -2 & 0 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 408 \\ -136 \\ 704 \end{pmatrix}$$

**Antwort:**

**Aufgabe 3:** (1 Punkt)
Erstelle eine reguläre $(3 \times 3)$-Matrix, bei der es unmöglich ist, sie mit Hilfe der Gaußelimination mit kanonischer Pivotisierung zu diagonalisieren.

**Antwort:**

## 2 Darstellung von Funktionen (14 Punkte)

**Aufgabe 4:** (1 Punkt)
Worin unterscheidet sich die Hermite-Interpolation von der Lagrange-Interpolation?

**Antwort:**

**Aufgabe 5:** (1 Punkt)
Welchen Vorteil hat die Polynominterpolation mit Chebyshev-Stützstellen gegenüber der Polynominterpolation mit äquidistanten Stützstellen?

**Antwort:**

**Aufgabe 6:** (5 Punkte)

Berechne mit Hilfe der Lagrangepolynome das interpolierende Polynom an den Stützstellen $-\pi, 0, \pi$ zur Funktion $f(x) = \cos x$.

**Antwort:**

**Aufgabe 7:** (3 Punkte)

Skizziere graphisch die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = \sin \pi x + \sin 2\pi x$. Bitte denke daran, die Achsen zu beschriften!

**Antwort:**

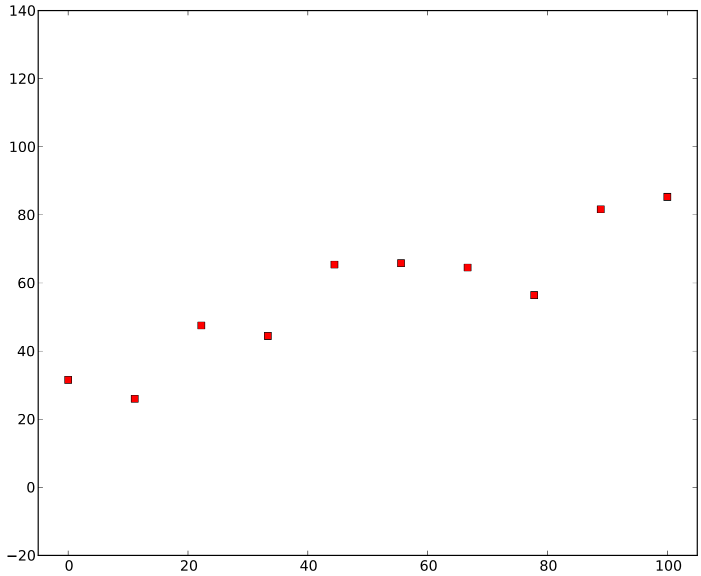
**Aufgabe 8:** (1 Punkt)
Nenne einen Vorteil der Splineinterpolation gegenüber der Interpolation mit Polynomen.

**Antwort:**

**Aufgabe 9:** (3 Punkte)
Im folgenden Graph sind $n$ Messpunkte eingezeichnet. Skizziere die Graphen der Funktionen, die bei den folgenden Methoden entstehen:

- Polynominterpolation $(n-1)$-ten Grades
- Natürliche Splines
- Methode der kleinsten Quadrate mit linearer Fitfunktion

**Antwort:**

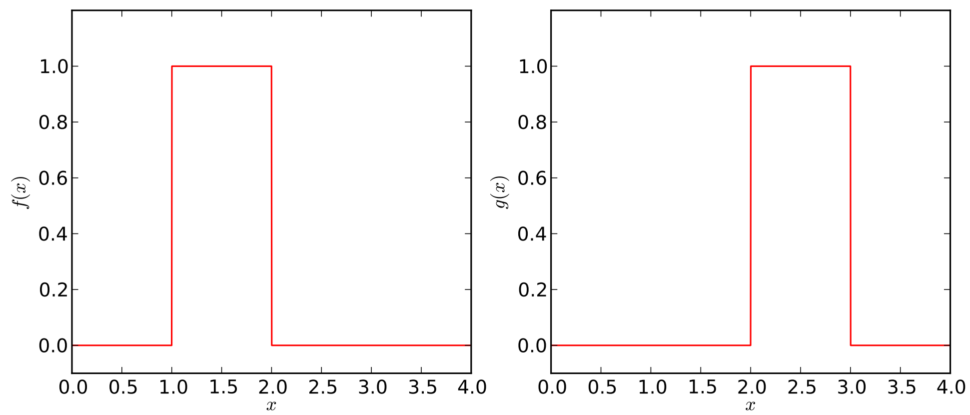


# 3 Signalverarbeitung (11 Punkte)

**Aufgabe 10:** (2 Punkte)
Nenne einen Vor- und einen Nachteil der sogenannten „Schnellen Fouriertransformation“ (FFT) gegenüber der diskreten Fouriertransformation (DFT).

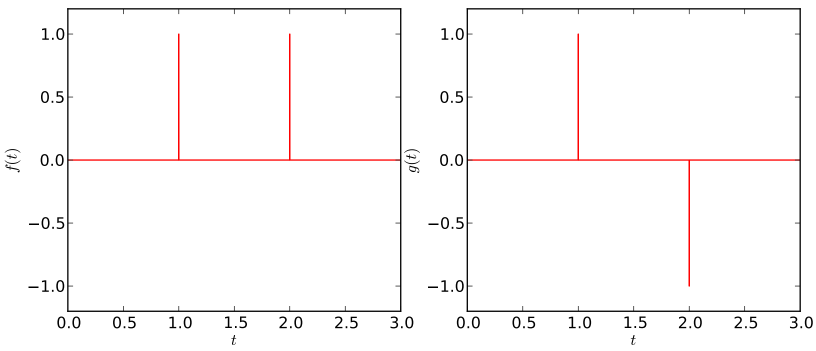
**Antwort:**

**Aufgabe 11:** (3 Punkte)
Skizziere das Faltungsprodukt $f \star g$ der beiden in der folgenden Abbildung skizzierten Funktionen $f$ (links) und $g$ (rechts).




**Antwort:**

**Aufgabe 12:** (3 Punkte)
Skizziere die Kreuzkorrelation der beiden in der folgenden Abbildung skizzierten Funktionen $f$ (links) und $g$ (rechts).




**Antwort:**

**Aufgabe 13:** (3 Punkte)
Skizziere (graphisch oder verbal) die Bedeutung der Nyquist-Frequenz eines Signals.

**Antwort:**

# 4 Nichtlineare Gleichungssysteme (14 Punkte)

**Aufgabe 14:** (1 Punkt)

Welche der folgenden drei Methoden kannst Du anwenden, wenn Du die Nullstelle einer Funktion suchst, deren Ableitung Du nicht kennst?

- Newtonverfahren
- Bisektion
- Regula falsi

**Antwort:**

**Aufgabe 15:** (5 Punkte)

Schreibe ein Stück Pythoncode, das mit Hilfe der (gegebenen) Funktion `newton(f, fp, x0)` zur Nullstellensuche den Wert von $17^{\frac{1}{4}}$ berechnet und ausgibt, ohne dabei den Pythonoperator `**` zu verwenden! Verwende als Startwert $x_0 = 2$. `f` sei dabei eine mathematische Funktion, `fp` deren Ableitung, und `x0` der Startwert des Newtonverfahrens. Die Funktion `newton` muss hier *nicht* definiert werden, sondern wird als gegeben vorausgesetzt.

**Antwort:**

**Aufgabe 16:** (5 Punkte)
Berechne die ersten drei Schritte des Sekantenverfahrens zum Lösen von $x^2 - 2 = 0$ mit den Startwerten $a = 0$ und $b = 2$.

**Antwort:**

**Aufgabe 17:** (3 Punkte)
Konvergiert die Regula falsi schneller als das Sekantenverfahren? Warum?

**Antwort:**

# 5 Numerisches Differenzieren und Integrieren (9 Punkte)

**Aufgabe 18:** (2 Punkte)
Welchen Vorteil haben Quasizufallszahlen bei der Monte-Carlo-Integration gegenüber Pseudozufallszahlen, und warum?

**Antwort:**

**Aufgabe 19:** (3 Punkte)
Diskretisiere die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \alpha x = g(x)$ mit Hilfe eines finite Differenzen-Schemas. Benutze für die zweite Ableitung die folgende Näherung:

$$f''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Beschreibe alle notwendigen Schritte, um eine Näherung für die Lösung der Differentialgleichung auf dem Interval $[0, L]$ zu berechnen. Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Gleichungssysteme können vorausgesetzt werden.

**Antwort:**

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)
Schreibe eine Pythonfunktion `trapez(f,a,b,N)`, die die zusammengesetzte Trapezregel implementiert und dadurch das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ an $N$ äquidistanten Stützstellen berechnet. Dabei seien $a$ und $b$ selbst Stützstellen.

**Antwort:**

# 6 Zufallszahlen (10 Punkte)

**Aufgabe 21:** (1 Punkt)
Nenne drei Methoden, um die Qualität von Zufallszahlen zu überprüfen.

**Antwort:**

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)
Skizziere (graphisch oder verbal), wie man mit Hilfe der Verwerfungsmethode aus einer Folge von gleichverteilten Zufallszahlen eine Folge von Zufallszahlen erzeugen kann, die eine durch die Verteilungsfunktion $G(x)$ gegebene Verteilung hat.

**Antwort:**

**Aufgabe 23:** (0 Punkte)
Skizziere (graphisch, verbal oder audiovisuell) ob es Poincaré-Schnitten auch mit Himbeerfüllung gibt.

**Antwort:**

**Aufgabe 24:** (1 Punkt)
Welchen Nachteil hat die Verwerfungsmethode gegenüber der Inversionsmethode?

**Antwort:**

**Aufgabe 25:** (4 Punkte)
Angenommen, Du möchtest die Landoberfläche der Erde mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration bestimmen. Dazu erzeugst Du zufällige Positionen auf der Erdoberfläche, indem Du jeweils den Breiten- und den Längengrad durch gleichverteilte Zufallszahlen festlegst. Wieso wirst Du keine gute Näherung erhalten?

**Antwort:**

# 7 Lineare Algebra II (9 Punkte)

**Aufgabe 26:** (2 Punkte)
Wird für die folgende Matrix das Jacobi-Verfahren konvergieren? Warum?

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

**Antwort:**

**Aufgabe 27:** (1 Punkt)
Zu welchem Verfahren ist das Relaxationsverfahren mit einem Dämpfungsparameter von $\omega = 1$ äquivalent?

**Antwort:**

**Aufgabe 28:** (3 Punkte)
Was tut die folgende Pythonfunktion? Welcher Algorithmus ist dabei implementiert?

```python
def f(A, N=1000):
    n = A.shape[0]
    I = numpy.identity(n)
    Ak = A.copy()
    for i in range(N):
        shift = Ak[-1,-1]
        Q, R = scipy.linalg.qr(Ak - shift*I)
        Ak = numpy.dot(R, Q) + shift*I
    lambdas = numpy.array([Ak[i,i] for i in range(n)])
    return lambdas
```

**Antwort:**

**Aufgabe 29:** (1 Punkt)

Erstelle eine L+D+U-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Antwort:**

**Aufgabe 30:** (2 Punkte)

Ist das Gauß-Seidel-Verfahren gut für parallele Ausführung geeignet? Warum?

**Antwort:**

# 8 Optimierung (7 Punkte)

**Aufgabe 31:** (4 Punkte)
Gesucht ist das lokale Minimum der Funktion $f(x, y) = \cos((x+1)(y-1))$. Führe vom Ausgangspunkt $x = y = 0$ zwei Schritte des Verfahrens des steilsten Abstiegs mit Schrittweite $\lambda = 0{,}1$ aus.

**Antwort:**

**Aufgabe 32:** (3 Punkte)
Skizziere (verbal oder graphisch) die Idee des *Simulated Annealing*.

**Antwort:**

# 9 Programmieren (8 Punkte)

**Aufgabe 33:** (5 Punkte)

Schreibe eine Pythonfunktion `random()`, die einen linearen Kongruenzgenerator nach der Formel $x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod m$ für $a = 1103515245$, $m = 2^{31}$ und $b = 12345$ implementiert.

**Antwort:**

**Aufgabe 34:** (3 Punkte)

Forme die folgende Pythonschleife in einen entsprechenden NumPy-Ausdruck (ohne Schleife in Python) um.

```
for i in range(N+1): a[i] += b[N-i]
```

**Antwort:**

# 10 Weitere Aufgaben (11 Punkte)

**Aufgabe 35:** (6 Punkte)

Berechne die Lösung der Gleichung $x^2 = e^x$ numerisch mit Hilfe eines Taschenrechners und einer der Methoden aus der Vorlesung auf zwei Nachkommastellen genau. Wie gehst Du vor? Welche Methode verwendest Du?

**Antwort:**

**Aufgabe 36:** (5 Punkte)

Nach einer durchgezechten Nacht implementiert ein Student den zweidimensionalen Randomwalk wie folgt (`randint(a,b)` liefert eine Zufallszahl zwischen a und b inklusive der Grenzen):

```
u = randint(0,3)
if u == 0: x += 1
elif u == 1: x -= 1
elif u == 3: y += 1
elif u == 4: y -= 1
```

Der Algorithmus ist fehlerhaft. Wie groß sind die mittleren Abweichungen vom Ursprung $\langle|x|\rangle$ und $\langle|y|\rangle$ nach 200 bzw. 800 Schritten? Skizziere die Graphen der mittleren Abweichungen vom Ursprung über der Anzahl Schritte.

**Antwort:**