Übungsblatt 4

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II

Klassische Feldtheorie

WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): (3 Punkte)

a) Welche Bedingung müssen die Elemente eines symmetrischen zweidimensionalen Tensors ϵ erfüllen, damit ϵ der linearisierte Greensche Verzerrungstensor eines ebenen Verschiebungsfeldes ist? Vergleichen Sie mit der Bedingung, daß ein zweidimensionales Kraftfeld ein Potential besitzt.
Hinweis:
Drücken Sie zunächst die Komponenten ϵ_{ij} durch Ableitungen $\partial u_i / \partial \xi_j$ aus. Welche Relation zwischen den zweiten Ableitungen von ϵ_{ij} besteht somit?
(2 Punkte)

b) Wenden Sie das Ergebnis aus a) auf einen Tensor der Form

$$\epsilon(\xi) = \begin{pmatrix} a(\xi_1^2 - \xi_2^2) & b\xi_1\xi_2 \\ b\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

an. Welche Bedingung ergibt sich für a und b? Wie lautet das Verschiebungsfeld? (1 Punkt)

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): (3 Punkte)

Gegeben sei ein ebenes Spannungsfeld, ausgedrückt durch einen Cauchy-Spannungstensor $\mathbf{T}$. t_n und t_s seien Normal- und Schubspannung bezüglich einer Geraden, deren Normale $\mathbf{n}$ im Hauptachsensystem die Komponenten n_i $(i = (1, 2))$ besitze. Für die Hauptspannungen σ_i gelte die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2$.

a) Berechnen Sie aus den Hauptspannungen σ_i die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$.
(Ergebnis: $t_n = n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2,\ t_n^2 + t_s^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2$.) (1 Punkt).

b) Bestimmen Sie t_s in Abhängigkeit von t_n Eliminieren Sie hierzu n_1 und n_2 aus den resultierenden Gleichungen unter Zuhilfenahme der Beziehung $n_1^2 + n_2^2 = 1$.
Hinweis: Als Ergebnis erhalten Sie den Mohrschen Spannungskreis $t_s^2 + [t_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}]^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$. (1 Punkt).

c) Zeigen Sie, dass die maximale Schubspannung durch $(t_s)_{max} = \frac{1}{2}\{(t_n)_{max} - (t_n)_{min}\}$ gegeben ist. (1 Punkt).

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für die Determinante Δ einer Jacobischen Matrix F_{ik}, die auch als Deformationsgradient bezeichnet wird, und ihr dazugehöriges Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = \Delta \mathrm{div}\, \mathbf{v}.$$