

# Übungsblatt 8

## Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II

### Klassische Feldtheorie

WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik  
Universität Stuttgart  
Prof. Dr. R. Hilfer

#### Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

Die elastische Energie eines Festkörpers schreibt sich in hookescher Näherung als

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

a) Für ein isotropes Medium gilt

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Wie lautet der Spannungstensor  $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$  und die elastische Energie in Abhängigkeit von  $\epsilon_{ij}$ ?

b) Die elastische Energie  $W$  ist eine quadratische Form der 6 unabhängigen Komponenten des Verzerrungstensors, die für jede Wahl des Verzerrungstensors  $\epsilon \neq 0$  größer als null sein muss (warum?). Leiten Sie hieraus Bedingungen für  $\mu$  und  $\lambda$  her.

*Hinweis:*

1. Möglichkeit: Schreiben Sie die elastische Energie als quadratische Form. Welche Bedingung gilt für die Eigenwerte der entsprechenden Matrix?

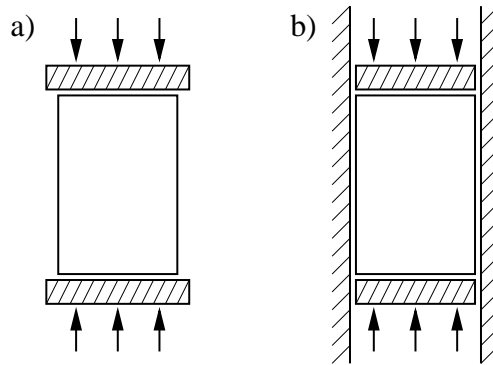
2. Möglichkeit: Zerlegen Sie den Verzerrungstensor  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)} = 1/3 \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon_{kk} \delta_{ij})$  (physikalische Bedeutung?) und schreiben Sie die elastische Energie in Abhängigkeit von  $\epsilon_{ij}^{(1)}$  und  $\epsilon_{ij}^{(2)}$ .

#### Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

Ein homogener Quader aus isotrop hookeschem Material wird zwischen zwei glatten ebenen Platten in einer Richtung gestaucht. Bei einem Versuch kann sich der

Quader in Querrichtung frei ausdehnen (Bild a)), bei einem anderen Versuch wird er allseitig zwischen starren ebenen glatten Wänden geführt (Bild b)). Bestimmen Sie das Verhältnis der Kräfte als Funktion der Laméschen Konstanten, unter deren Wirkung sich der Stab in den beiden Versuchen um das gleiche Stück verkürzt. Diskutieren Sie dieses Verhältnis in Abhängigkeit der Poissonschen Querkontraktionszahl.



**Aufgabe 3 (Hausaufgabe):**

**(4 Punkte)**

- a) Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines thermoelastischen Materials lautet

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda\text{Sp}\epsilon \mathbf{1} - \beta(T - T_0) \mathbf{1},$$

wobei  $T_0$  eine Referenztemperatur ist. Bestimmen Sie  $\beta$  derart, dass ohne äußere Spannung die Ausdehnung linear von der Temperatur abhängt und der thermische Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  beträgt.

- b) Betrachten Sie nun eine inhomogene Temperaturverteilung  $T$ . Welcher Differentialgleichung muß  $T$  gehorchen, damit sich ein spannungsfreier Zustand ergibt? *Hinweis:*

Verwenden Sie die Kompatibilitätsbedingungen für  $\epsilon$  aus der Vorlesung.