

Übungsblatt 5

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II

Klassische Feldtheorie

WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik

Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

In der Aufgabe 2 auf Übungsblatt 4 haben Sie für ein zweidimensionales Spannungsfeld den Mohrschen Spannungskreis berechnet, der bei gegebenem Spannungstensor eine eindeutige Beziehung zwischen Normal- und Schubspannung herstellt. Im dreidimensionalen Fall existiert diese eindeutige Beziehung nicht mehr. Jedoch gibt es drei Mohrsche Spannungskreise, die die Normal- und Schubspannungen auf ein bestimmtes Gebiet eingrenzen. Das Gebiet soll hier ermittelt werden. Dazu sei ein dreidimensionales Spannungsfeld gegeben, für dessen Hauptspannungen σ_i , $i = 1, 2, 3$ die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ gelte.

- Berechnen Sie die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$ (t_s ...Schubspannung) in Abhängigkeit der Hauptspannungen σ_i und der Komponenten n_i des Flächenvektors. Arbeiten Sie dazu im Eigensystem des Spannungstensors. (1 Punkt).
- Leiten Sie aus den Beziehungen in a) mit Hilfe der Normierungsbedingung für den Flächenvektor, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, drei Gleichungen ab (z. B.: $n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = t_s^2 + (t_n - \sigma_2)(t_n - \sigma_3)$). Mit Hilfe von $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ folgen daraus drei Ungleichungen, die das gesuchte Gebiet im $t_n - t_s$ Diagramm beschreiben. Was sind die Mohrschen Spannungskreise? (2 Punkte).
- Wodurch ist die maximale Schubspannung gegeben? (1 Punkte).

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Drehimpulsbilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Dabei ergab sich die Symmetrie des *Cauchy*schen Spannungstensors $T = T^T$.

Leiten Sie analog zur Vorlesung die Drehimpulsbilanz in *materieller* Formulierung her. Folgern Sie daraus die Symmetrieaussagen für den ersten und den zweiten *Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensor (${}^I P$ und ${}^{II} P$):

$$\begin{aligned} {}^I P \cdot F^T &= F \cdot {}^I P^T \\ {}^{II} P &= {}^{II} P^T \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):

(4 Punkte)

Für einen Spannungstensor T im Punkt P seien die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die dazugehörigen Hauptrichtungen $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ bekannt. Man berechne die maximale Schubspannung und die zugeordnete Richtung.

Aufgabe 4 (Hausaufgabe):

(6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Reynoldsche Transporttheorem

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_B \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad \text{mit } \Psi = \int_B \Phi dV$$

kennengelernt und mit seiner Hilfe aus der Massenerhaltung die Kontinuitätsgleichung der Massendichte abgeleitet. Analog lassen sich mit seiner Hilfe auch die Kontinuitätsgleichungen für weitere dichteartige Größen herleiten.

- a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.
Benutzen Sie nun das Reynoldsche Transporttheorem für eine alternative Herleitung, indem Sie von der Ladungserhaltung ausgehen. (2 Punkte).
- b) Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet in SI-Einheiten $u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$.
Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Reynoldschen Transporttheorem gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen. (2 Punkte).
- c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle? (1 Punkt).
- d) Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die Impulsdichte $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme. (1 Punkt).