Übungsblatt 6

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2018/19

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass für ein ruhendes Medium die Gleichgewichtsbedingung

$$\varrho \boldsymbol{k} + \operatorname{div} \boldsymbol{T} = 0$$

aus der Impulsbilanz folgt, wobei $\boldsymbol{k}$ die Massenkraftdichte und $\boldsymbol{T}$ den Spannungstensor darstellt. Zeigen Sie, dass für ein isotropes Medium

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I}$$

gilt. (1 Punkt).

b) Leiten Sie aus der Bedingung in a) die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \exp(-\varrho_0 g z / p_0)$$

ab.
Hinweis: p und ϱ sind Druck bzw. Dichte der Luft, g ist die Erdbeschleunigung und wird als konstant angesetzt und z ist die Höhe über der Erdoberfläche. Betrachten Sie die Atmosphäre als isothermes, ideales Gas, so dass die Beziehung $p/p_0 = \varrho/\varrho_0$ gilt. (2 Punkte).

c) Bestimmen Sie den Druckverlauf für den Fall, dass die Luft der Polytropengleichung $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^n}{\varrho_0^n}$ genügt. (1 Punkt).

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die Energiebilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Leiten Sie analog zur Vorlesung die Energiebilanz in *materieller* Formulierung her.

Aufgabe 3: **(3 Punkte)**

Wir betrachten ein zeitabhängiges Gebiet $G = G(t)$ mit zugehörigem Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. Das Gebiet ist aus zwei zusammenhängenden Teilgebieten G_1 und G_2 zusammengesetzt (die Mengen G_1, G_2 und G werden als abgeschlossen angenommen) die sich in einer Grenzfläch U schneiden, das heißt

$$G = G_1 \cup G_2, \qquad G_1 \cap G_2 = U. \tag{1}$$

Die Größen, die den Zustand des Kontinuums bestimmen (diese hängen von Ort $\boldsymbol{r}$ und Zeit t ab), sind stetig differenzierbar im inneren von G_1 und G_2 und ihre Grenzwerte bei Annäherung an U, von G_1 oder G_2 aus, existieren. Das Geschwindigkeitsfeld von U wird durch $\boldsymbol{u}$ notiert und der Normaleneinheitsvektor, der in das Gebiet G_2 weisst, wird durch $\boldsymbol{N}$ notiert.

Man betrachtet nun eine Funktion $\psi = \psi(\boldsymbol{r}, t)$ und vollzieht den Grenzübergang zur Unstetigkeitsfläche U dieser Funktion. Das heißt, man lässt G_1 und G_2 normal zur Fläche hin U kleiner werden, so daß die Menge G gegen U konvergiert. Es ergibt sich

$$\lim_{G \to U} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_G \psi \, \mathrm{d}V = \int_U [\psi_1 (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{N} - \psi_2 (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{N}] \, \mathrm{d}F. \tag{2}$$

(Zur Herleitung siehe nächste Seite.) Die Größen ψ_1 und ψ_2 stellen den G_1- bzw. G_2-seitigen Grenzwert von ψ an U dar und $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ den G_1- bzw. G_2-seitigen Grenzwert von $\boldsymbol{v}$ an U.

a) Zu welchem Ergebnis führt die Anwendung der Formel (2) auf die Kontinuitätsgleichung? Interpretieren Sie physikalisch.

b) Schreiben Sie die Entropieungleichung (2. Hauptsatz der Thermodynamik) für das Gebiet G in integraler Form. Wenden Sie die Formel (2) darauf an und beachten Sie das Ergebnis des Aufgabenteils a).

c) Was ergibt sich aus b), wenn Sie als Material ein ideales Gas verwenden? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Herleitung der Formel (2)

Da $G = G_1 \cup G_2$ und $G_1 \cap G_2$ ein Volumen von 0 hat, gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_G \psi \,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_{G_1} \psi \,\mathrm{d}V + \int_{G_2} \psi \,\mathrm{d}V \right). \tag{3}$$

Es wird nun zunächst das Integral über G_1 betrachtet.

Die totale zeitliche Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ enthält die Beiträge zur zeitlichen Änderung des Volumenintegrals durch die zeitliche Änderung von ψ und durch die zeitliche Änderung des Integrationsgebietes. Da innerhalb von G_1 keine weiteren Unstetigkeiten vorhanden sind, heben sich dort die Nettoflüsse durch die Volumenelemente auf. Die Oberfläche von G_1 lässt sich Zerlegen in U und F_1, das heißt $F_1 := \partial G_1 \setminus U$. Damit erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_1} \psi \,\mathrm{d}V = \int_{G_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \,\mathrm{d}V + \int_{F_1} \psi \,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}F + \int_U \psi_1 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} \,\mathrm{d}F \tag{4}$$

mit $\boldsymbol{u}$ der Geschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche U und $\boldsymbol{v}$ dem Geschwindigsfeld des Körpers, $\boldsymbol{N}$ der Normalen zu U und $\boldsymbol{n}$ der vom Rand von G_1.

Wir wollen nun den ersten Term auf der rechten Seite von (4) als Volumenintegral über das Gebiet G_1 schreiben. (Wenn ψ die Massendichte darstellt, so ergeben sich dann die Kontinuitätsgleichung und zusätzlich die Terme von der Unstetigkeitsfläche.) Dazu schreiben wir ihn als

$$\int_{F_1} \psi \,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}F = \int_{F_1 \cup U \cup (-U)} \psi \,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}F = \int_{\partial G_1} \psi \,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}F + \int_{-U} \psi_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{N} \,\mathrm{d}F \tag{5}$$

mit $\partial G_1 = F_1 \cup U$. Dabei ist das Integral über $-U$ gleich dem Integral über U mit Oberflächenelement $-\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}F$ (d.h. umgekehrte Orientierung).

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_1} \psi \,\mathrm{d}V = \int_{G_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \,\mathrm{d}V + \int_{\partial G_1} \psi \,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}F + \int_U \psi_1 \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1\right) \cdot \boldsymbol{N} \,\mathrm{d}F. \tag{6}$$

Verwendet man für das Integral über die Fläche ∂G den Gaußschen Satz, der besagt, dass ein Oberflächenintegral über ein stetiges Vektorfeld gleich dem entsprechenden Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes ist, so ergibt sich aus (5) schließlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{G_1} \psi \,\mathrm{d}V = \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V + \int_U \psi_1 \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1\right) \cdot \boldsymbol{N} \,\mathrm{d}F. \tag{7}$$

Eine analoge Beziehung erhält man für das Gebiet G_2, so dass aus (3) letztendlich

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_G \psi \,\mathrm{d}V = & \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V + \int_{G_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V \\ & - \int_U \psi_1 \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1\right) \cdot \boldsymbol{N} \,\mathrm{d}F + \int_U \psi_2 \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2\right) \cdot \boldsymbol{N} \,\mathrm{d}F \end{aligned} \tag{8}$$

hervorgeht. Vollzieht man die Grenzprozesse

$$G_1 \to U, \qquad G_2 \to U$$

so, dass sich das Gebiet G auf die Unstetigkeitsfläche U zusammenzieht, das heißt $G \to U$, dann ergibt sich auf (8) die Formel (2).