Gausselemination:	$a_{ik}^{(r)} = a_{ik}^{(r-1)} - l_i^{(r)} a_{r,k}^{(r-1)}$ für $i = r+1(1)n, k = r(1)m$ $b_i^{(r)} = b_i^{(r-1)} - l_i^{(r)} b_r^{(r-1)}$ für $i = r+1(1)n$ mit $l_i^{(r)} = \frac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}$. $a_{ik}^{(r)} = a_{ik}^{(r-1)},\ b_i^{(r)} = b_i^{(r-1)}$ sonst
LU-Zerlegung:	$A = L \cdot R$ mit $r_{ij} = a_{ij}^{(r)}$ und $l_{ij} = \begin{cases} l_j^{(i)} & \text{für } i \geq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$
Lösung per LU Zerlegung:	$Ly = b\,, Ux = y \rightarrow Ax = LUx = Ly = b$
Cholesky:	Zerlege positiv semidefinites $A = R^T R$ $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$ und $r_{1k} = \frac{a_{1k}}{r_{11}}$ für $k > 1$ $r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} r_{li}^2}, \quad r_{ik} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{l=1}^{i-1} r_{li} r_{lk} \right)$, für $k > i$
Horner Schema:	Auswerten eines Polynoms: $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i = c_0 + x(c_1 + x(c_2 + x(\ldots(c_{n-1} + xc_n))))$
Linearer Spline:	$P_1(x) = \frac{(x_{i+1}-x)y_i + (x-x_i)y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} \quad x_i \leq x < x_{i+1}$
Kubischer Spline:	$P_3(x) = y_i + m(x - x_i) + \frac{1}{2} M_i (x - x_i)^2 + \frac{1}{6} \alpha_i (x - x_i)^3$ für $x_i \leq x < x_{i+1}$ $\alpha_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}$ für $i = 0(1)n-2$ $m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i)(2M_i + M_{i+1})$ für $i = 0(1)n-2$ natürlich: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3''(x_0) \\ 6S_1 \\ \vdots \\ 6S_{n-2} \\ P_3''(x_{n-1}) \end{pmatrix}$ mit $\lambda_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}$, $\mu_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ und $S_i = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$. periodisch: die inneren Zeilen periodisch fortsetzen
Nevill-Aitken-Schema:	Auswerten des interpolierenden Polynoms $P_{0,n}(x)$ durch (x_i, y_i) an der Stelle x $P_{i,1}(x) = y_i,\ i = 0(1)n-1, \quad P_{i,k}(x) = \frac{P_{i,k-1}(x)(x_{i+k-1} - x) + P_{i+1,k-1}(x)(x - x_i)}{x_{i+k-1} - x_i}$.
Chebyshev-Stützstellen	$x_{k,n} = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$
Fourierreihe:	$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \exp(\imath n \omega t)$ mit $\hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-\imath n \omega t) \mathrm{d}t$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\widehat{\left(\frac{df}{dt}\right)}_n = \imath n \omega \hat{f}_n$
DFT:	$\mathrm{DFT}(f_k)_n = g_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-\imath \frac{2\pi}{N} nk)$, $\mathrm{iDFT}(g_n)_k = f(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n}{N} \exp(\imath \frac{2\pi}{N} nk)$
Faltung:	$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \mathrm{d}\tau$ oder im Fourierraum $\widehat{(f \star g)}_k = \sqrt{2\pi} \hat{f}_k \hat{g}_k$
Schätzer	Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$, Varianz $\sigma^2 \approx \frac{N}{N-1} (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$ quadratischer Fehler: $\sigma^2 / \sqrt{N}$, bzw. $\sigma^2 / \sqrt{N / 2\tau_{\mathrm{int}}}$ bei korrelierten Daten
Autokorrelation:	$C_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) \mathrm{d}\tau$, diskret: $C_f(k\Delta) \approx \frac{1}{N-k} \sum_{l=0}^{N-k} f(l\Delta) f((l+k)\Delta)$
Newtonverfahren:	Approximation durch Tangente $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, lokal quadratisch konvergent
Sekantenverfahren:	Approximation durch Sekante $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
Bisektion:	$f \in C([a,b])$ und $f(a)f(b) < 0 \rightarrow m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ wenn $\begin{cases} f(m_n) f(a_n) < 0 & \rightarrow b_{n+1} = m_n \\ f(m_n) f(b_n) < 0 & \rightarrow a_{n+1} = m_n \end{cases}$ bis $b_{n+1} - a_{n+1} <$ Toleranz linear konvergent
MC Integration:	$\int_{x \in V} f(x) \mathrm{d}x \approx \frac{\lvert V \rvert}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$ mit ξ_i gleichverteilte Zufallsvektoren in V
zus. Trapezregel:	$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$ $= h \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2} \right)$ äquidistant, also mit $h = \frac{b-a}{N}$ und $x_i = a + h \cdot i$
zus. Mittelpunktsregel:	$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$ äquidistant, also mit $h = \frac{b-a}{N}$ und $x_i = a + h(i + \frac{1}{2})$
finite Differenzen:	$f'(x_i) \approx \begin{cases} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = f'(x_i) + \mathcal{O}(h^2) \text{ zentrale Differenz} \\ \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = f'(x_i) + \mathcal{O}(h) \text{ linke Differenz} \\ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = f'(x_i) + \mathcal{O}(h) \text{ rechte Differenz} \end{cases}$ $f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1} - 2f(x_i) + f(x_{i-1}}{h^2}$

<table>
<tr><td>Zufallsgenerator LCG
c rand:
MinStd:</td><td>$x_{i+1} = (ax_i + b) \mod m$
$m = 2^{31}$ $a = 1.103.515.245$ und $b = 12.345$ bzw. $m = 2^{48}$, $a = 25.214.903.917$ und $b = 11$
$m = 2^{31} - 1 \quad a = 16807 \quad b = 0$</td></tr>
<tr><td>Verzögerter Fibonacci:</td><td>$x_n = (x_{n-a} + x_{n-b}) \mod m,$
$a = 250$ $b = 103$ (Stoll Kirkpatrick), $a = 521$ $b = 168$</td></tr>
<tr><td>Verwerfungsmethode:</td><td>Ziehen von ZZ gemäß einer beliebigen beschränkten Verteilung $\rho(p) \leq \rho_{\max}$ auf V:
ziehe p gleichverteilt aus V und u gleichverteilt auf $[0, \rho_{\max}]$
akzeptiere p, wenn $u \leq \rho(p)$</td></tr>
<tr><td>Box-Muller-Verfahren:</td><td>Erzeugen von normalverteilten Zufallszahlen z, z' aus Standardzufallszahlen durch Inversion
ziehe u und u' gleichverteilt auf [0,1] $\implies \begin{cases} z = \sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi u') \\ z' = \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi u') \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Qualitätsanalyse</td><td>Mittelwerttest: B Blöcke der Größe k: $X_i := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{j+(i-1)k} \implies \langle X_i \rangle = \frac{1}{2}$ bzw. $X_i \approx \frac{1}{2}$ für große k
χ^2-Test: Binnen der Daten in M Bins mit Grenzen $b_i \implies$ W-keit aus Bin i zu ziehen ist $P_i = b_{i+1} - b_i$
$\implies \chi^2 = \sum_{i=1}^{M} \frac{(N_i - NP_i)^2}{NP_i}$ misst, ob wirklich gleichverteilt in [0,1]
Varianztest: $\frac{B}{B-1}\left(\overline{(X_i - \bar{X}_i)^2}\right) \overset{!}{\approx} \frac{1}{\sqrt{12k}}$
Poincáre-Schnitte: Auftragen von x_i, x_{i+1}, x_{i+2} in Würfel, um Korrelationen an Ebenenbildung zu erkennen
Fouriertest: 0-Amplitude der Fouriertransformierten $\approx N/2$, alle anderen ≈ 0
Autokorrelationstest: Eine Zufallsreihe ist δ-korreliert</td></tr>
<tr><td>Random Walk</td><td>Zufällige Schritte $\pm 1 \implies$ Verteilung nach t Schritten $\rho(x,t) = \rho(x_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$</td></tr>
<tr><td>Jacobi-Verfahren</td><td>LDU-Zerlegung: $x^{(i+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(i)} + D^{-1}b = -D^{-1}(L+U)x^{(i)} + D^{-1}b,$
$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k \neq j} a_{jk} x_k^{(i)}\right)$</td></tr>
<tr><td>Gauß-Seidel-Verfahren / SOR</td><td>$x_j^{(i+1)} = \frac{\omega}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(i+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k^{(i)}\right) + (1-\omega)x_j^{(i)}, \quad \omega = 1$ ist Gauß-Seidel</td></tr>
<tr><td>Gram-Schmidt-Verfahren:</td><td>$A = QR$ mit $q_1 = \frac{a_1}{\Vert a_1 \Vert}, \quad q_k = \frac{a_k - \sum_{i=1}^{k-1}(a_k, q_i) q_i}{\Vert a_k - \sum_{i=1}^{k-1}(a_k, q_i) q_i \Vert}, \quad r_{ik} = \begin{cases} (a_k, q_i) \text{ falls } i < k \\ \Vert a_k - \sum_{i=1}^{k-1}(a_k, q_i) q_i \Vert \text{ falls } i = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Givensrotation:</td><td>Drehen eines Matrixelements auf Null durch $G_{i,k,\phi} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s & 0 \\ \vdots & 0 & I & 0 & \vdots \\ 0 & -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix}$ mit $r' = \sqrt{1 + (y/x)^2}$, $c = \operatorname{sgn}(x)\frac{1}{r'}$, und $s = \frac{y}{\vert x \vert r'}$</td></tr>
<tr><td>QR-Algorithmus:</td><td>$A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}, \quad A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)} = \left(Q^{(k)}\right)^H A^{(k)} Q^{(k)}$ konvergiert, Eigenwerte von $A^{(0)}$ auf der Diagonalen</td></tr>
<tr><td>Inverse Iteration:</td><td>Eigenvektor zu approx. Eigenwert λ: $(A - \lambda I)\,\tilde{x}^{(i+1)} = x^{(i)}, \quad x^{(i+1)} = \frac{\tilde{x}^{(i+1)}}{\Vert \tilde{x}^{(i+1)} \Vert_2}$</td></tr>
<tr><td>Steepest descent:</td><td>Minimieren durch $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)}), \quad \lambda > 0$, aber klein</td></tr>
<tr><td>Armijo-Schrittweiten:</td><td>Gesicherter Abstieg durch $f(x + \lambda d) \leq f(x) + \alpha\lambda \nabla f(x)^T d, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>Simplex-Normalform</td><td>$\min(c^T x)$ unter NB $x \geq 0, \quad Ax = b$</td></tr>
<tr><td>Runge-Kutta:</td><td>Numerische Lösung von DGL 1. Ordnung $\frac{dy}{dt}(t) = F(t, y(t))$,
$y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_j,$
mit $k_j = F\left(t + hc_j, y_n + h\sum_{k=1}^{s} a_{jk} k_k\right)$. Explizit Verfahren, wenn k_j aus k_k, $k < j$ zu berechnen</td></tr>
<tr><td>Butcher-Tableaus:</td><td>Euler explizit $\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$, Euler implizit $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$, Runge-Kutta $\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Verlocity-Verlet:</td><td>$\ddot{x}(t) = F[t, x(t)], \quad x_n \approx x(t_n),$
äquidistant mit Schrittweite h
$v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2} F(t_n, x_n)$
$x_{n+1} = x_n + h v_{n+1/2}$
$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{h}{2} F(t_{n+1}, x_{n+1})$</td></tr>
</table>