Übungsblatt 5

Relativitätstheorie II

Sommersemester 2018
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Zeigen Sie aus der Definition, dass die Größe R^i_{jkl} ein Tensor ist.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Bestimmen Sie für den Fall einer zweidimensionalen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit mit einer Metrik g, die im Koordinatensystem (x^1, x^2) eine einfache Form annimmt, vereinfachte Formeln für die Christoffelsymbole und den Krümmungstensor.

1. Für eine Konstante $a \neq 0$ und eine glatte Funktion $f(x^1)$, die nirgends verschwindet, gilt

$$(g_{ij}(x^1, x^2)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (f(x^1))^2 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

2. Für Konstanten $a, b \neq 0$ und eine glatte Funktion $f(x^1)$, die nirgends verschwindet, gilt

$$(g_{ij}(x^1, x^2)) = (f(x^1))^2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Die Einheitskugel im dreidimensionalen Raum sei durch Kugelkoordinaten (θ, ϕ) wie üblich parametrisiert $(0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$.

1. Zeigen Sie, dass die einzigen nicht-verschwindenden Christoffelsymbole in diesen Koordinaten

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{3}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta \tag{4}$$

sind.

2. Ein Tangentialvektor $\mathbf{V}$ im Punkt $A(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ werde nun entlang des folgenden Weges auf der Kugeloberfläche parallelverschoben: (1) entlang des Längenkreises $\phi = 0$ zum Nordpol, (2) entlang des Längenkreises $\phi = \pi/2$ zurück zum Äquator, (3) entlang des Äquators zurück zum Ausgangspunkt A. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem ursprünglichen und parallelverschobenen Vektor im Punkt A. Interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

Aufgabe 4 — 4 Punkte

Wir betrachten das Radarkoordinatensystem (y^0, y^1) des Beobachters aus Teil 2 von Aufgabe 3 vom Blatt 4. In diesem Koordinaten ist die Metrik gegeben durch

$$(\widetilde{g}_{ij}) = \mathrm{e}^{2ay^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Stellen Sie die Geodätengleichungen in diesen Koordinaten auf und lösen Sie diese entweder direkt oder durch einen geschickten Ansatz. Bestimmen Sie zu gegebenem Anfangspunkt $\gamma(0) \in \mathbb{R}^2$ und gegebener Anfangsgeschwindigkeit $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^2$ die entsprechende Geodätische.

Hinweis: Falls Sie versuchen die Gleichung direkt zu lösen: Betrachten Sie die Summe und die Differenz der Geodätengleichungen.