Übungsblatt 3

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2016/17

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

Gegeben sei ein Verschiebungsfeld $u(\xi) = x(\xi) - \xi = A\xi$. Ist A unabhängig von ξ, so handelt es sich um eine homogene Deformation. Bestimmen Sie für folgende homogene Deformationen ($0 < c < 1$) den Greenschen Verzerrungstensor, den Rechts-Streck-Tensor U mit seinen Hauptachsen, den Drehtensor R und den Drehwinkel φ. Skizzieren Sie jeweils die Deformation eines Einheitskreises.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

a) Welche Bedingung müssen die Elemente eines symmetrischen zweidimensionalen Tensors ϵ erfüllen, damit ϵ der linearisierte Greensche Verzerrungstensor eines ebenen Verschiebungsfeldes ist? Vergleichen Sie mit der Bedingung, daß ein zweidimensionales Kraftfeld ein Potential besitzt.
Hinweis:
Drücken Sie zunächst die Komponenten ϵ_{ij} durch Ableitungen $\partial u_i/\partial \xi_j$ aus. Welche Relation zwischen den zweiten Ableitungen von ϵ_{ij} besteht somit?

(2 Punkte)

b) Wenden Sie das Ergebnis aus a) auf einen Tensor der Form

$$\epsilon(\xi) = \begin{pmatrix} a(\xi_1^2 - \xi_2^2) & b\xi_1\xi_2 \\ b\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

an. Welche Bedingung ergibt sich für a und b? Wie lautet das Verschiebungsfeld? (1 Punkt)

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (5 Punkte)

a) Bei kleinen Verschiebungen u lässt sich der Deformationsgradient schreiben als $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \delta\mathbf{F}$ mit $\delta F_{ij} = \partial u_i / \partial \xi_j$. Zeigen Sie, dass für die polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ in linearer Näherung gilt

$$U = I + \delta F_{sym},$$

$$R = I + \delta F_{anti},$$

wobei δF_{sym} der symmetrische und δF_{anti} der antisymmetrische Anteil von δF ist. (2 Punkte).

b) Zeigen Sie, dass für die Volumendilatation $(\mathrm{d}\tilde{V} - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V = \det F - 1$ gilt:

$$\det F - 1 = \mathrm{Sp}\ \delta\mathbf{F}_{sym} = \mathrm{div}\ u.$$

(1 Punkt).

c) Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von ε nennt man Hauptdeformationen bzw. Hauptdeformationsrichtungen. Was bedeuten positive (negative) Eigenwerte? Beschreiben Sie die Verformung einer Kugel mit Radius R (ε in Diagonalform). Wie ändert sich ihr Volumen? (1 Punkt).

d) Eine Dehnungsfläche ist definiert durch $x^T \varepsilon x = const$. Zeigen Sie, dass bei reiner Verzerrung die Verschiebung u eines materiellen Punktes P parallel zur Normalen n der Dehnungsfläche an der Stelle x_P ist (Poinsotsche Konstruktion). Wo findet die Poinsotsche Konstruktion außerhalb der Kontinuumsmechanik Anwendung? (1 Punkt).