

Übungsblatt 5

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2018/19

Fakultät Mathematik und Physik

Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Drehimpulsbilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Dabei ergab sich die Symmetrie des *Cauchy*schen Spannungstensors $T = T^T$.

Leiten Sie analog zur Vorlesung die Drehimpulsbilanz in *materieller* Formulierung her. Folgern Sie daraus die Symmetrieaussagen für den ersten und den zweiten *Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensor (${}^I P$ und ${}^{II} P$):

$${}^I P \cdot F^T = F \cdot {}^I P^T$$

$${}^{II} P = {}^{II} P^T$$

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

Für einen Spannungstensor T im Punkt P seien die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die dazugehörigen Hauptrichtungen $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ bekannt. Man berechne die maximale Schubspannung und die zugeordnete Richtung.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):**(6 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie das Reynoldsche Transporttheorem

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_B \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad \text{mit } \Psi = \int_B \Phi dV$$

kennengelernt und mit seiner Hilfe aus der Massenerhaltung die Kontinuitätsgleichung der Massendichte abgeleitet. Analog lassen sich mit seiner Hilfe auch die Kontinuitätsgleichungen für weitere dichteartige Größen herleiten.

- a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her. Benutzen Sie nun das Reynoldsche Transporttheorem für eine alternative Herleitung, indem Sie von der Ladungserhaltung ausgehen. (2 Punkte).
- b) Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet in SI-Einheiten $u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$.
Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Reynoldschen Transporttheorem gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen. (2 Punkte).
- c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle? (1 Punkt).
- d) Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die Impulsdichte $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme. (1 Punkt).

Frohes Weihnachtsfest!