Übungsblatt 1

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie
WS 2018/19

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass man jeden Tensor $\mathbf{F}$ mit $\det \mathbf{F} > 0$ wie folgt "polar" in ein Produkt zerlegen kann

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}. \tag{1}$$

Dabei ist $\mathbf{R}$ eigentlich orthogonal ($\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$ und $\det \mathbf{R} = +1$), und $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ sind positiv definit. (Ein symmetrischer Tensor $\mathbf{A}$ heisst positiv definit, wenn für alle Vektoren $\mathbf{a} \neq 0$ gilt $(\mathbf{Aa}) \cdot \mathbf{a} > 0$).
Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{Fa}) \cdot (\mathbf{Fa}) = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{Fa}) \cdot \mathbf{a} > 0$ für alle $\mathbf{a} \neq 0$ gilt.

b) Setzen Sie, dass $\mathbf{U} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{1/2}$ und $\mathbf{R} = \mathbf{FU}^{-1}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{R}$ eigentlich orthogonal und $\mathbf{U}$ positiv definit ist.

c) Zeigen Sie Eindeutigkeit der Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$. Nehmen Sie dazu an, es gäbe zwei verschiedene Zerlegungen ($\mathbf{RU} = \mathbf{R}'\mathbf{U}'$) und zeigen Sie, dass $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}'^2$.

d) Schliessen Sie von $\mathbf{V} = (\mathbf{FF}^{\mathrm{T}})^{1/2}$ auf die Zerlegungen $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$.

Aufgabe 2: **(2 Punkte)**

Ein kovariantes Vektorfeld (Funktion, die jedem Punkt einen Vektor zuweist) habe in rechtwinkligen Koordinaten die Komponenten xy, $2y - z^2$ und xz. Wie lauten seine kovarianten Komponenten in Kugelkoordinaten?

Aufgabe 3: **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie für die $(2,0)$-Tensoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \\
&\quad +4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - 1\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{M} &= 1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \\
&\quad +4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + 1\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

(die Basiseinheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems sind mit $\mathbf{e}_\mathrm{i}$ bezeichnet und $\mathbf{e}_\mathrm{i} \otimes \mathbf{e}_\mathrm{j}$ ist ihr Tensorprodukt).

a) den transponierten Tensor.

b) die Spur.

c) den Kugeltensor ($\mathbf{T}^\mathrm{K} = \frac{1}{3}\mathrm{T}^\mathrm{k}_\mathrm{k}\delta^\mathrm{ij}\mathbf{e}_\mathrm{i}\otimes\mathbf{e}_\mathrm{j}$) und den Deviator ($\mathbf{T}^\mathrm{D} = \mathbf{T} - \mathbf{T}^\mathrm{K}$) sowie die Spur des Kugeltensors und des Deviators.

d) und den inversen Tensor.