

Computergrundlagen Zahlensysteme, Fließkommazahlen und Fehlerquellen

Institut für Computerphysik
Universität Stuttgart

Wintersemester 2017/18

Wie rechnet ein Computer?

Ein Mikroprozessor

- ist ein Netz von Transistoren, Widerständen und Kondensatoren
- Leitungen kennen nur zwei Zustände: Spannung oder nicht
- Interpretation als ja/nein, 0/1, an/aus, richtig/falsch...
- Schaltungen entsprechen logischen Operationen

Die richtige Algebra (das richtige Zahlensystem) muss verwendet werden um damit rechnen zu können.

Was sind Zahlensysteme?

- Ein Zahlensystem wird zur Darstellung von Zahlen verwendet.
- Jede ganze Zahl $B \geq 2$ kann als Basis(B) verwendet werden.
- Die Stelle bestimmt den Wert der Ziffer (die „niederwertigste“ Position steht dabei im Allgemeinen rechts, z.B. die erste 3 in 373 hat einen anderen Wert als die zweite 3 dreihundert nicht drei).
- Der Ziffervorrat ist 0 bis $B-1$.
- Die Zifferposition bestimmt den Stellenwert B^n ; entspricht eine Potenz der Basis.
- Zwei benachbarte Stellenwerte unterscheiden sich um den Faktor B.
- Die gängigsten Basen sind 2 (Dualsystem), 8 (Oktalsystem), 10 (Dezimal für Alltags Rechnen) oder 16 (Hexadezimalsystem für Informatik).

Was sind Zahlensysteme?

- Das System zur $B=2$ enthält nur 0 und 1 und wird für Computerrechnen und Datenspeichern verwendet.
- Die kleinste Informationseinheit (Bit) ist die Information über die Möglichkeiten 1 oder 0.
- In der Computertechnik wird oft das Hexadezimalsystem (Basis $B=16$) verwendet (0-9,A-F).
- Die Standardeinheit der Informationsgröße ist ein Byte (=8 Bit): die Information über eine aus 256 Möglichkeiten (die je zwei Zustände der acht Bits ermöglichen insgesamt $2^8=256$ Möglichkeiten).
- In dezimaler Darstellung: 0, 1, 2, ... bis 255, im Binärsystem: 00000000, 00000001, 00000010, ... bis 11111111.)
- Mit dem 16er-System (immer genau 2 Ziffern entsprechen einem Byte) viel besser handhaben als mit dem Dezimalsystem.

Zahlensysteme: Eigenschaften

- Wie kann ich mit nur zwei Elementen Zahlen darstellen?

Sei $B > 0$ eine natürliche Zahl. Dann kann jede natürliche Zahl z *eindeutig* dargestellt werden als

$$z = \sum_{k=0}^n B^k z_k,$$

wobei für alle k , $0 \leq z_k < B$ und nur endlich viele $z_k \neq 0$.

Beispiel

$B = 10$ entspricht unserem Dezimalsystem:

$$1042 = 10^0 \cdot 2 + 10^1 \cdot 4 + 10^2 \cdot 0 + 10^3 \cdot 1 = 1042_{10}$$

oder:

$$2022_8 = 8^0 \cdot 2 + 8^1 \cdot 2 + 8^2 \cdot 0 + 8^3 \cdot 2 = 1042_{10}$$

Binärsystem

- Wie kann ich mit nur zwei Elementen Zahlen darstellen?

Wir benutzen das *Binärsystem* mit $B = 2$ und Ziffern 0 und 1 (Bits)

Beispiele

$$1042 = 2^{10} + 2^4 + 2^1 = 10.000.010.010_2$$

- Umrechnung von Binär- auf Dezimalzahlen ist umständlich
- Binär ↔ oktal ist einfach:

$$10.000.010.010_2 = 2022_8$$

- *Hexadezimal* ($B = 16$, Ziffern 1–9, A–F) auch:

$$10.000.010.010_2 = 412_{16}$$

$$1010.1111.1111.1110_2 = \text{AFFE}_{16}$$

Umwandeln von Binär in Hexadezimalzahlen und umgekehrt

- Jeweils 4 Binärstellen entsprechen einer Hexadezimalstelle ($16 = 2^4$).
- Umwandlung:
 - **Vom Binär- ins Hexadezimalsystem:** die Binärzahl (rechts nach links) in 4er-Päckchen unterteilen; jedes Päckchen nach nebenstehender Tabelle in die entsprechende Hexadezimalziffer umwandeln.
 - **Vom Hexadezimal- ins Binärsystem:** die Hexadezimalziffern der Reihe nach in die entsprechenden vierstelligen Binärzahlen umwandeln.

Dezimal	Hexadezimal	Binär
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Quelle:mathe-lexikon.at

Umwandeln von Binär in Oktalzahlen

- Jeweils 3 Binärstellen entsprechen einer Oktalstelle ($8 = 2^3$).
- Die Ziffern in Dreierblöcke gruppieren (von rechts nach links),
- die entsprechenden oktale Ziffern aus der Tabelle ablesen,
- falls Stellen über bleiben, die keine vollständige Dreier-Gruppe ergeben, kann man sich statt dessen 'unsichtbare Nullen' vorstellen (z.B. 10 ist mit 010 gleichbedeutend und umgekehrt die Dreiergruppe 001 ist gleichbedeutend mit 1).

Oktal	Binär
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Quelle:mathe-lexikon.at

Darstellung reeller Zahlen

$$\pm 1,23456789 \cdot 10^{\pm 123}$$

- Eine Fließkommazahl besteht aus:
 - Vorzeichen
 - **Mantisse**
 - (10er-)Exponent
- Stellen daher nur einen Teil der rationalen Zahlen exakt dar
- Alle anderen Zahlen werden angenähert
- Die Mantissenlänge bestimmt die Genauigkeit der Näherung

Binär entsprechend:

$$\pm 1,0011110000001100101 \cdot 2^{\pm 1111011}$$

IEEE-Fließkommazahlen

Speicherung einer 64-Bit-Fließkommazahl nach IEEE 754-Standard:



- Keine Komplementdarstellung von Mantisse oder Exponent
- Binärsystem: (normalisierte) Mantisse wird ohne führende Stelle gespeichert, die immer 1 ist
- Der 11-bittige Exponent e ist um (Bias=)1023 (127 in 32-Bit-Fließkommazahlen) verschoben gespeichert und nimmt Werte von -1022 ($e = 1$) bis 1023 ($e = 2046$) an
- Der Wert einer Zahl ist also:

$$\pm 1, m \cdot 2^{e-1023}$$

Spezielle Werte

Was ist mit den Exponenten -1023 ($e = 0$) und 1024 ($e = 2047$)?

Diese stellen spezielle Werte dar:

$e = 0$ und $m = 0$	± 0
$e = 0$ und $m \neq 0$	Zahlen der Form $\pm 0, m \cdot 2^{-1022}$
$e = 2047$ und $m = 0$	$\pm \infty$
$e = 2047$ und $m \neq 0$	$\pm \text{NaN}$ (not a number)

- Da die erste Stelle immer 1 ist, kann 0 nur so dargestellt werden
- $\pm \infty$ ergibt sich z.B. bei Berechnung von $\pm 1/0$
- $\pm \text{NaN}$ ergibt sich z.B. bei Berechnung von $\sqrt{-1}$
- Python fängt NaNs mit Fehlern ab, nicht aber z.B. C

32-Bit gegen 64-Bit Fließkommazahlen

- 32-Bit: einfach-genaues Format (single precision)
 - [Länge des Exponenten=8 Bit, Länge der Mantisse=23 Bit, Bias des Exponenten=127]
 - Genauigkeit der Darstellung von ca. 7 Dezimalstellen
 - z.B. bei einer Zahl wie 12.345,678 ist die dritte Stelle nach dem Komma schon ungenau
 - in numerischen Berechnungen mit mehreren Rechenoperationen sinkt die Genauigkeit sehr stark → einfach genaues Format nicht ausreichend
- 64-Bit: doppelt genaues Format (double precision)
 - [Länge des Exponenten=11 Bit, Länge der Mantisse=52 Bit, Bias des Exponenten=1023]
 - Genauigkeit der Darstellung von ca. 16 Dezimalstellen.

Speicherplatz und Rechenleistung sind so reichlich vorhanden, dass man nur noch das doppelt genaue Format verwendet kann.

Subtraktion/Addition von Fließkommazahlen

Beispiele:

$$\begin{aligned} & 1,0 \cdot 10^0 + 1,0 \cdot 10^{-5} \\ & = 1,0 \cdot 10^0 + 0,00001 \cdot 10^0 = 1,00001 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1,000002 \cdot 10^0 - 1,000001 \cdot 10^0 \\ & = 0,000001 \cdot 10^0 = 1,0 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

- Verschieben der Mantisse der kleineren Zahl, bis beide denselben Exponenten haben
- Dabei gehen Stellen der kleineren Zahl verloren
- Dann gewöhnliche Addition/Subtraktion der Mantissen
- Schließlich den Exponenten verringern, bis die Mantisse keine führenden Nullen hat

Unterlauf/Überlauf

- In der Fließkomma-Darstellung gibt es eine kleinste (größte) positive Zahl,
- unter (über) diese Zahl kann kein Wert dargestellt werden
- in diesem Bereich wird die Zahl als $0(\infty)$ repräsentiert
- im Falle eines Zwischenergebnisses ist die Information über das Ergebnis verloren

Zahlen verschiedener Größenordnung

- Die Addition/Subtraktion einer betragsmäßig viel kleineren Zahl ändert die größere Zahl nicht
 in einer vierstelligen Dezimalarithmetik:

$$\begin{aligned}
 1\text{e}3 + 1\text{e}-2 &= 1,000 \cdot 10^3 + 1,000 \cdot 10^{-2} \\
 &= 1,000 \cdot 10^3 + 0,000\,010\dots \cdot 10^2 \\
 &= 1,000 \cdot 10^3 + 0,000 \cdot 10^3 = 1\text{e}3
 \end{aligned}$$

Auslöschung: falsches Ergebnis bei der Subtraktion fast gleich großer Zahlen

Ist $x < 2^{-l_m}$, wobei l_m die Bitlänge der Mantisse ist, so ist in Fließkommaarithmetik

$$x \rightarrow x + 1 - 1 \rightarrow (x + 1) - 1 \rightarrow 1 - 1 \rightarrow 0$$

- *Auslöschung* der vorderen Stellen bei Subtraktion ungefähr gleich großer Zahlen führt zu fehlenden hinteren Stellen im Ergebnis
- Im Beispiel verschwindet die kleinere Zahl x komplett
- Ist $x \approx 2^{-l_m}$, verliert x fast alle signifikanten Stellen
- Formeln muss man umformen so dass keine Auslöschung passieren kann.

Beispiel: quadratische Gleichung

- Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$:

$$x_{\pm} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

- Bei kleinem b ist $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \approx \frac{a}{2}$
- $a > 0$: *Auslöschung* bei der größeren Nullstelle x_+
- $a < 0$: *Auslöschung* bei der kleineren Nullstelle x_-
- Ausweg: Es gilt

$$x_+ x_- = \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right) \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right) = b$$

- Berechne also nur die stabile Summe (x_- bei $a > 0$, sonst x_+), und die zweite Nullstelle durch $x_+ = b/x_-$ bzw. $x_- = b/x_+$

Multiplikation von Fließkommazahlen

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 1,01 \cdot 10^0 \times 1,01 \cdot 10^5 \\ &= 1,0101 \cdot 10^{0+5} = 1,0101 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

- Multiplikation und Division sind unkritisch, es kann zu keiner Auslöschung kommen
- Allerdings zu Über- oder Unterläufen des Exponenten
- In diesem Fall ist das Ergebnis ∞ bzw. 0
- Meist kann man dies aber durch geeignete Umformungen auch vermeiden, z.B. durch logarithmisches Rechnen

Fehlerquellen bei numerischen Rechnungen

- **Numerische Fehler**

- Auslöschung
- Über- und Unterläufe
- Rundungsfehler durch endliche Mantissenlänge

- **Algorithmische (Verfahrens-) Fehler**

- Abschneidefehler: Unendliche Summen müssen durch endliche Summen ersetzt werden
- Diskretisierungsfehler: Funktionsauswertung immer nur an endlich vielen Punkten

- **Modellierungsfehler**

- Das der Rechnung zugrundeliegende Modell erfasst wesentliche Details des Experiments nicht

- **Datenfehler**

- Genauigkeit der Anfangswerte (z.B. aus einem Experiment)