Übungsblatt 8

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie II

Klassische Feldtheorie

SS 2019

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie die Deformation einer elastischen Vollkugel mit Radius R unter der Wirkung des eigenen Gravitationsfeldes.

1. Leiten Sie die Hauptgleichung der linearen Elastostatik für ein isotropes Material her:

$$(\mu + \lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{k} = 0$$

   wobei $\mathbf{u}$ das Verschiebungsfeld und $\mathbf{k}$ die Volumenkraftdichte ist. Gehen Sie von $\mathrm{div}\,\sigma + \mathbf{k} = 0$ aus (Impulsbilanz mit $\mathbf{v} = 0$) und verwenden Sie das Spannungs-Dehnungs-Gesetz für ein isotropes Material.

2. Stellen Sie nun die Hauptgleichung der Elastostatik für die elastische Vollkugel in Kugelkoordinaten auf. Überlegen Sie sich zunächst, welche Komponenten des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}$ im vorliegenden Problem vorkommen und von welchen Koordinaten sie abhängen. Setzen zunächst $k_r(r) = \rho_0^2 r \frac{4\pi}{3}$ mit ρ_0 einer konstanten Massendichte an.
   Hinweis: Berechnen Sie den Laplace-Operator mit Hilfe der Beziehung: $\Delta = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$. Verwenden Sie Folgerungen aus der geometrischen Linearisierung.

3. Berechnen Sie das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ unter den Randbedingungen, dass die Verschiebungen im Kugelzentrum endlich sind, und dass die Komponente σ_{rr} des Spannungstensors an der Oberfläche verschwindet. Formulieren Sie dazu die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Kugelkoordinaten.

   Wie groß ist der Druck im Kugelzentrum?

4. Tragen Sie den Verlauf der Radialkomponente der Verschiebung u_r über r auf. An welchen Stellen im Innern der Kugel ist die Verschiebung Null? Wo liegt ein Extremum? Ist es sinnvoll, dass u_r positiv wird? Warum spielt hier ein positives u_r keine Rolle? Ermitteln Sie dazu mit Hilfe der Stabilitätsbedingungen für λ und μ: $\mu > 0$ und $2\mu + 3\lambda > 0$, eine untere Grenze für die Lage der Nullstelle von u_r.

5. Wie lautet der korrekte Ansatz für $k_r(r)$?

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**

Leiten Sie die *Beltrami-Michell*-Gleichungen

$$\Delta\sigma + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}\nabla(\nabla \mathrm{Tr}\sigma)^T + \rho(\nabla\mathbf{k}^T + (\nabla\mathbf{k}^T)^T) + \frac{\lambda\rho}{\lambda + 2\mu}(\nabla\mathbf{k}) \cdot \mathbf{1} = 0$$

aus den Kompatibilitätsbedingungen

$$\nabla \times (\nabla \times \epsilon)^T = 0$$

her. Setzen Sie dazu das *Hooke*sche Gesetz für ϵ (isotroper Fall) ein und betrachten Sie den elastostatischen Fall für homogene, isotrope Medien.
Hinweis: Versuchen Sie Indexschreibweise zu vermeiden und verwenden Sie statt dessen Eigenschaften des Cauchyschen-Spannungstensors.

Aufgabe 3: **(4 Punkte)**

Ein ebenes hexagonales Gitter lässt sich in linear Näherung durch zwei elastische Konstanten beschreiben:

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \mathrm{Tr}\epsilon\mathbf{1}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechung der elastischen Konstanten λ und μ aus einem einfachen mikroskopischen Modell.

1. Die interatomare Wechselwirkung wird als Lennard-Jones Potential

$$V(r) = V_0\left(\left(\frac{s}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{s}{r}\right)^{6}\right)$$

zwischen benachbarten Gitterplätzen angenommen. Entwickeln Sie die Wechselwirkungsenergie um den Gleichgewichtsabstand. Wie groß ist die Bindungsenergie pro Flächenelement?

2. Betrachten Sie eine isotrope Streckung der Atomanordnung. Berechnen Sie die Energiezunahme in Abhängigkeit des Streckfaktors. Welche Gleichung erhalten Sie hiermit für die elastischen Konstanten λ und μ?

3. Machen Sie die analoge Überlegung wie in Teil 2 für eine Scherung. Hieraus und aus dem Ergebnis von Teil 2 ergibt sich $\lambda(V_0, s)$ und $\mu(V_0, s)$.