# Übungsblatt 7

**Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II**

## Klassische Feldtheorie

## WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

**Aufgabe 1 (Votieraufgabe):** **(2 Punkte)**

Aus der Ladungserhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0.$$

Im Folgenden wird der stationäre Fall angenommen ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

a) Zeigen Sie, dass im stationären Fall durch jeden Querschnitt derselbe Strom fließt. Zerteilen Sie hierfür exemplarisch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens $V$, durch die ein Strom fließe, in zwei Teile.

b) Vier Leiter seien durch einen Knoten, der sich in einem Gebiet mit dem Volumen $V$ befindet, verbunden. Zwei Leiter sollen einen Strom ($I_1$ bzw. $I_2$) in das Gebiet hineintragen und zwei Leiter sollen einen Strom ($I_3$ bzw. $I_4$) hinaustragen. Zeigen Sie, dass am Leiterknoten die Summe der zufließenden gleich die Summe der abfließenden Ströme ist (*Kirchhoff* sche Knotenregel).

**Aufgabe 2 (Votieraufgabe):** **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$c_v \rho \frac{\partial T(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(\boldsymbol{x}, t) \tag{1}$$

auf ganz $\mathbb{R}^d$.

a) Geben Sie, analog zu Gleichung (VI.4.21) der Vorlesung, eine Integraldarstellung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) mit Anfangsbedingung $T(\boldsymbol{x}, 0) = T_0(\boldsymbol{x})$ an.

b) Zeigen Sie, dass die in a) gefundene Integraldarstellung die Wärmeleitungsgleichung (1) für eine beschränkte Funktion $T_0(\boldsymbol{x})$ löst.

c) Berechnen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) für einen unendlich langen Draht ($d = 1$) mit der Anfangsbedingung

$$T_o(x) = \begin{cases} b_1 & , \ -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ b_2 & , \ \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

d) Für einen Eisendraht ist $\lambda = 80\ W/(mK)$, $c_v = 450\ J/(kgK)$ und $\rho = 7870\ kg/m^3$. Die Parameter der Anfangsbedingung (2) werden spezifiziert mit $b_1 = 1000\ °C$, $b_2 = 0\ °C$ und $L = 2\ m$.
Zu welchem Zeitpunkt $t$ ist die Temperatur $T$ an dem Ort $x = 0\ m$ zum ersten Mal kleiner als $T = 500\ °C$?
Wie hängt dieser Zeitpunkt $t$ von dem Temperaturunterschied $\Delta b = b_1 - b_2$ ab?

**Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (8 Punkte)**

Betrachten Sie ein System von geladenen Teilchen, auf die nur die Lorentzkraft des elektromagnetischen Feldes wirken soll.

a) Begründen Sie die mechanische Impulsbilanz für den Gesamtimpuls $\boldsymbol{p}_V^{(mech)}$:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_V^{(mech)} = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \int_V d^3r(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}).$$

b) Eliminieren Sie $\rho$ und $\boldsymbol{j}$ durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Bringen Sie die Terme auf die Form

$$\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \operatorname{div} \boldsymbol{B} + \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{B} - \frac{d}{dt}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{D} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$$

*Hinweis:* Homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{4}$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \rho && (5) \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \dot{\boldsymbol{D}} &= \boldsymbol{j} && (6) \end{aligned}$$

Materialgleichungen (lineares Medium):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} && (7) \\ \boldsymbol{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \boldsymbol{E} && (8) \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulses des elektromagnetischen Feldes

$$\boldsymbol{p}_V^{(Feld)} = \int_V d^3r (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})$$

die Gesamtimpulsbilanz $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_V^{(mech)} + \boldsymbol{p}_V^{(Feld)})$. Sie ist symmetrisch in magnetischen und elektrischen Größen.

d) Zeigen Sie, dass für ein lineares, homogenes Medium gilt:

$$(\boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{D} - \boldsymbol{D} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E})_i = \epsilon_r \epsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij})$$

und analog:

$$(\boldsymbol{H} \operatorname{div} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H})_i = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij}).$$

e) Mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors $\boldsymbol{T}$ kann die Impulsbilanz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_V^{(mech)} + \boldsymbol{p}_V^{(Feld)}) = \int_V d^3r \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}.$$

Geben Sie $T_{ij}$ an.

f) Formen Sie das Ergebnis aus e) mit Hilfe des Gaußschen Satzes um. Interpretieren Sie das Ergebnis.

g) Berechnen Sie die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators ($\boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{E} = (0, 0, -E)$).