

Übungsblatt 11

Kontinuumstheorie

SoSe 2013

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

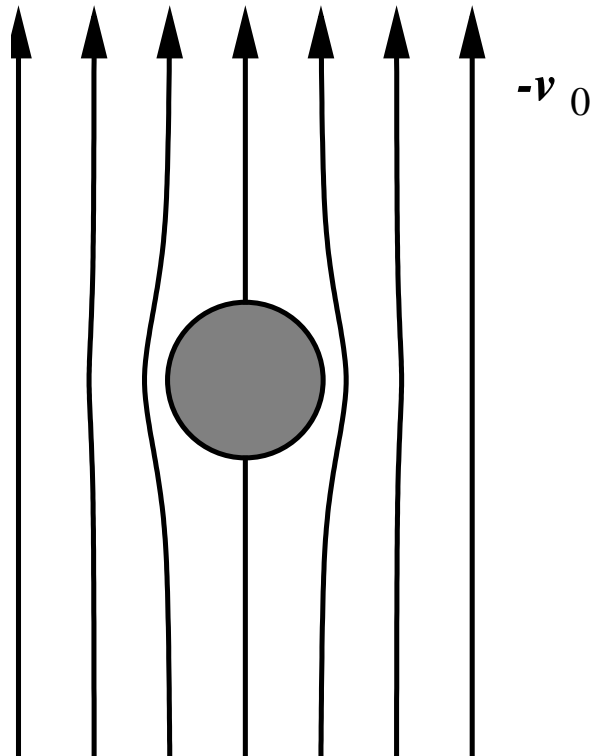
Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

Im folgenden soll die Widerstandskraft auf eine Kugel mit dem Radius R , die sich in einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit mit einer konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt, bestimmt werden (s. Abb.). Dieses Problem ist äquivalent zu der Beschreibung einer ruhenden Kugel, die von einer Flüssigkeit, die im Unendlichen die Geschwindigkeit $-\mathbf{v}_0$ besitzt, umströmt wird. Sie haben in der Vorlesung die Navier-Stokes-Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit kennengelernt:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{k} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}$$

Im folgenden wird die Erdgravitation vernachlässigt und man nimmt an, dass die Geschwindigkeiten so klein sind, dass die Trägheitsterme ($v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ usw.) auch vernachlässigt werden können.



- a) Wie sehen die Navier-Stokes-Gleichungen unter den obigen Annahmen aus? Wählen Sie nun für die Geschwindigkeit der Strömung den Ansatz

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \mathbf{w} ,$$

d. h. die Geschwindigkeit wird in einen wirbelfreien Anteil und einen wirbelbehafteten restlichen Anteil zerlegt. Zeigen Sie, dass man eine mögliche Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erhält, wenn man $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{0}$ fordert. Was für eine Gleichung erhalten Sie dabei für den Druck? Welche Gleichung für Φ und \mathbf{w} ergibt sich aus der Annahme der Inkompressibilität?

Wie sehen die Randbedingungen für Φ und \mathbf{w} am Rand der Kugel und im Unendlichen aus? Das Problem ist nun vollständig bestimmt.

b) Nehmen Sie zur Lösung des Problems zunächst die folgenden Ansätze:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= C \frac{\mathbf{v}_0}{r} \quad ; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \Phi &= f(r) (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}) .\end{aligned}$$

Wie sehen die Randbedingungen für Φ und schließlich für $f(r)$ aus? Welche DGL ergibt sich für $f(r)$? Lösen Sie die DGL und zeigen Sie, dass für das Geschwindigkeitsfeld gilt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \left(\frac{R^3}{4r^3} + \frac{3R}{4r} - 1 \right) + \frac{3R}{4r^3} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \mathbf{r} .$$

c) Mit Hilfe des Ergebnisses aus b) und der Bestimmungsgleichung für den Druck aus a) können Sie nun die Kraft auf die Kugel nach

$$K_i = \int dF (p n_i - \tau_{ik} n_k) \quad \text{mit } \boldsymbol{\tau} = 2\eta \operatorname{def} \mathbf{v} \quad \text{und } \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{r}$$

bestimmen, indem Sie über die Kugeloberfläche integrieren. Als Ergebnis erhält man die Stokesche Widerstandsformel für eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit:

$$\mathbf{K} = -6\pi\eta R \mathbf{v}_0$$

Zwischenergebnis: Sie erhalten für die Kraft

$$\mathbf{K} = - \int dF \left(p_0 \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{3\eta}{2R} \mathbf{v}_0 \right)$$

wobei p_0 ein konstanter Druck ist, der als Integrationskonstante in a) auftaucht.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(2 Punkte)

Auf welchen Wertebereich wird durch die Stabilitätsbedingung für isotropes Material

$$2\mu + 3\lambda > 0, \quad \mu > 0$$

die Querkontraktionszahl ν mit

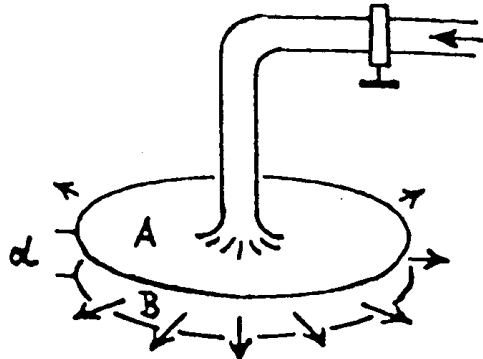
$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

eingeschränkt?

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):

(4 Punkte)

Das skizzierte rotationssymmetrische Gerät zeigt folgendes Strömungsparadox: Wenn Gas durch die Anordnung strömt, erfährt die bewegliche Platte B eine auf die Platte A gerichtete Kraft. Schätzen Sie das Gewicht G ab, dem bei gegebenen Überdruck P im Vorratskessel des Gaswerks das Gleichgewicht gehalten werden kann.



- Erklären Sie diesen Effekt zunächst qualitativ. Welcher bekannte Satz wird hier zweckmäßig angewendet? Skizzieren Sie — ebenfalls qualitativ — die Stromlinien. Gibt es Staupunkte? Wodurch sind diese ausgezeichnet?
- Berechnen Sie die Strömung zwischen den Platten unter folgenden Annahmen:
Das reibungsfrei strömende Gas sei inkompressibel. Die Strömung sei eine ebene Potentialströmung, d. h. $\mathbf{v} = \text{grad}\Phi$. Zwischen den Platten bilde sich eine Strömung aus, die in z -Richtung konstant ist. Äußern Sie sich kritisch zu diesen Vereinfachungen.
Welcher Gleichung genügt das Geschwindigkeitspotential Φ . Bei der Lösung tritt eine freie Integrationskonstante im resultierenden Geschwindigkeitsfeld auf, die man aus der Forderung bestimmt, dass am Rand der Platten A und B der Atmosphärendruck p_a herrscht.
- Berechnen Sie den Gasdruck zwischen den Platten A und B. Er zeigt eine unangenehme Besonderheit, die Sie durch die Einführung eines Abscheideradius r_0 beseitigen können. Wie würden Sie r_0 wählen? Geben Sie obere und untere Grenzen für den Gasdruck im Scheibchen $0 \leq r \leq r_0$ an und begründen Sie diese physikalisch!
- Ermitteln Sie nun eine obere und eine untere Schranke für das zulässige Gewicht G der Platte B, in denen zunächst r_0 steht. Bei einer möglichen Wahl von r_0 kommt in den Grenzen von G der Plattenabstand d explizit nicht vor. Anschaulich ist jedoch klar, dass G mit wachsendem Abstand d kleiner werden muss. Erklären Sie diese Tatsache, indem Sie eine alternative Abschätzung für r_0 verwenden, in die d eingeht.