Übungsblatt 3

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2018/19

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**

a) Bestimmen Sie den Deformationsgradienten für die Deformation

$$x_1 = \xi_1 + \alpha\xi_2, \qquad x_2 = \xi_2, \qquad x_3 = \xi_3. \tag{1}$$

Beschreiben Sie die Deformation geometrisch. Gibt es materielle Linienelemente $\mathrm{d}\xi$, deren Richtung bei der Deformation sich nicht ändert? Wie ändert sich das Volumen?

b) Geben Sie den Deformationsgradienten $\mathbf{F}(\xi)$ für eine zweiachsige, isochore Streckung an. Gibt es auch hier Linienelemente $\mathrm{d}\xi$, die bei der Deformation ihre Richtung nicht ändern?

c) Bestimmen Sie für das ebene Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{2}$$

die Abbildung $\mathbf{x}(\xi, t)$ sowie den Deformationsgradienten $\mathbf{F}(\xi, t)$.

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**

Gegeben sei ein Verschiebungsfeld

$$u(\xi) = x(\xi) - \xi = A\xi. \tag{3}$$

Ist A unabhängig von ξ, so handelt es sich um eine homogene Deformation. Bestimmen Sie für folgende homogene Deformationen ($0 < c < 1$) den Greenschen Verzerrungstensor, den Rechts-Streck-Tensor U mit seinen Hauptachsen, den Drehtensor R und den Drehwinkel ϕ. Skizzieren Sie jeweils die Deformation eines Einheitskreises

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Aufgabe 3: **(3 Punkte)**

a) Welche Bedingung müssen die Elemente eines symmetrischen zweidimensionalen Tensors ε erfüllen, damit ε der linearisierte Greensche Verzerrungstensor eines ebenen Verschiebungsfeldes ist? Vergleichen Sie mit der Bedingung, daß ein zweidimensionales Kraftfeld ein Potential besitzt.

   Hinweis:

   Drücken Sie zunächst die Komponenten ε_{ij} durch Ableitungen $\partial u_i/\partial \xi_j$ aus. Welche Relation zwischen den zweiten Ableitungen von ε_{ij} besteht somit?

b) Wenden Sie das Ergebnis aus a) auf einen Tensor der Form

$$\varepsilon(\xi) = \begin{pmatrix} a(\xi_1^2 - \xi_2^2) & b\xi_1\xi_2 \\ b\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

   an. Welche Bedingung ergibt sich für a und b? Wie lautet das Verschiebungsfeld?

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**

a) Bei kleinen Verschiebungen u lässt sich der Deformationsgradient schreiben als $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \delta\mathbf{F}$ mit $\delta F_{ij} = \partial u_i / \partial \xi_j$. Zeigen Sie, dass für die polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ in linearer Näherung gilt

$$U = I + \delta F_{\text{sym}} \tag{6}$$

$$R = I + \delta F_{\text{anti}} \tag{7}$$

wobei δF_{sym} der symmetrische und δF_{anti} der antisymmetrische Anteil von δF ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Volumendilatation $(\mathrm{d}\widetilde{V} - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V = \det F - 1$ gilt:

$$\det F - 1 = \mathrm{Sp}\, \delta\mathbf{F}_{\text{sym}} = \operatorname{div} u. \tag{8}$$

c) Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von ε nennt man Hauptdeformationen bzw. Hauptdeformationsrichtungen. Was bedeuten positive (negative) Eigenwerte? Beschreiben Sie die Verformung einer Kugel mit Radius R (ε in Diagonalform). Wie ändert sich ihr Volumen?

d) Eine Dehnungsfläche ist definiert durch $x^{\mathrm{T}} \varepsilon x = \text{const}$. Zeigen Sie, dass bei reiner Verzerrung die Verschiebung u eines materiellen Punktes P parallel zur Normalen n der Dehnungsfläche an der Stelle x_P ist (Poinsotsche Konstruktion). Wo findet die Poinsotsche Konstruktion außerhalb der Kontinuumsmechanik Anwendung?