Übungsblatt 7
Kontinuumstheorie
WS 2012/13

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(2 Punkte)**

Aus der Ladungserhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0.$$

Im Folgenden wird der stationäre Fall angenommen ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

a) Zeigen Sie, dass im stationären Fall durch jeden Querschnitt derselbe Strom fließt. Zerteilen Sie hierfür exemplarisch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V, durch die ein Strom fließe, in zwei Teile.

b) Vier Leiter seien durch einen Knoten, der sich in einem Gebiet mit dem Volumen V befindet, verbunden. Zwei Leiter sollen einen Strom (I_1 bzw. I_2) in das Gebiet hineintragen und zwei Leiter sollen einen Strom (I_3 bzw. I_4) hinaustragen. Zeigen Sie, dass am Leiterknoten die Summe der zufließenden gleich die Summe der abfließenden Ströme ist (*Kirchhoff* sche Knotenregel).

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

Die elastische Energie eines Festkörpers schreibt sich in hookescher Näherung als

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

a) Für ein isotropes Medium gilt

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Wie lautet der Spannungstensor $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$ und die elastische Energie in Abhängigkeit von ϵ_{ij}?

b) Die elastische Energie W ist eine quadratische Form der 6 unabhängigen Komponenten des Verzerrungstensors, die für jede Wahl des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon} \neq 0$ größer als null sein muss (warum?). Leiten Sie hieraus Bedingungen für μ und λ her.
Hinweis:
1. Möglichkeit: Schreiben Sie die elastische Energie als quadratische Form. Welche Bedingung gilt für die Eigenwerte der entsprechenden Matrix?
2. Möglichkeit: Zerlegen Sie den Verzerrungstensor $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)} = 1/3\epsilon_{kk}\delta_{ij} + (\epsilon_{ij} - 1/3\epsilon_{kk}\delta_{ij})$ (physikalische Bedeutung?) und schreiben Sie die elastische Energie in Abhängigkeit von $\epsilon_{ij}^{(1)}$ und $\epsilon_{ij}^{(2)}$.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (8 Punkte)

Betrachten Sie ein System von geladenen Teilchen, auf die nur die Lorentzkraft des elektromagnetischen Feldes wirken soll.

a) Begründen Sie die mechanische Impulsbilanz für den Gesamtimpuls $\boldsymbol{p}_V^{(mech)}$:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_V^{(mech)} = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \int_V d^3r(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}).$$

b) Eliminieren Sie ρ und $\boldsymbol{j}$ durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Bringen Sie die Terme auf die Form

$$\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{B} - \frac{d}{dt}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{D} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$

Hinweis: Homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{2}$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \tag{3}$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \dot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{j} \tag{4}$$

Materialgleichungen (lineares Medium):

$$\boldsymbol{B} = \mu_r\mu_0\boldsymbol{H} \tag{5}$$
$$\boldsymbol{D} = \epsilon_r\epsilon_0\boldsymbol{E} \tag{6}$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulses des elektromagnetischen Feldes

$$\boldsymbol{p}_V^{(Feld)} = \int_V d^3r(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})$$

die Gesamtimpulsbilanz $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_V^{(mech)} + \boldsymbol{p}_V^{(Feld)})$. Sie ist symmetrisch in magnetischen und elektrischen Größen.

d) Zeigen Sie, dass für ein lineares, homogenes Medium gilt:

$$(\boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_i = \epsilon_r\epsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(E_iE_j - \frac{1}{2}E^2\delta_{ij})$$

und analog:

$$(\boldsymbol{H}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H})_i = \frac{1}{\mu_r\mu_0} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(B_iB_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij}).$$

e) Mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors $\boldsymbol{T}$ kann die Impulsbilanz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_V^{(mech)} + \boldsymbol{p}_V^{(Feld)}) = \int_V d^3r \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}.$$

Geben Sie T_{ij} an.

f) Formen Sie das Ergebnis aus e) mit Hilfe des Gaußschen Satzes um. Interpretieren Sie das Ergebnis.

g) Berechnen Sie die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators ($\boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{E} = (0, 0, -E)$).