Übungsblatt 5
Relativitätstheorie II

Sommersemester 2023
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1)

Zeigen Sie aus der Definition, dass die Größe R^i_{jkl} ein Tensor ist.

Aufgabe 2)

Bestimmen Sie für den Fall einer zweidimensionalen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit mit einer Metrik g, die im Koordinatensystem (x^1, x^2) eine einfache Form annimmt, Formeln für die Christoffelsymbole und den Krümmungstensor.

1. Für eine Konstante $a \neq 0$ und eine glatte Funktion $f(x^1)$, die nirgends verschwindet, sei die Metrik von der Form
$$(g_{ij}(x^1, x^2)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (f(x^1))^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
2. Für Konstanten $a, b \neq 0$ und eine glatte Funktion $f(x^1)$, die nirgends verschwindet, sei die Metrik von der Form
$$(g_{ij}(x^1, x^2)) = (f(x^1))^2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Aufgabe 3)

Die Einheitskugel im dreidimensionalen Raum sei durch Kugelkoordinaten (θ, ϕ) wie üblich parametrisiert $(0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$.

1. Zeigen Sie, dass die einzigen nicht-verschwindenden Christoffelsymbole in diesen Koordinaten gegeben sind durch
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{3}$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta. \tag{4}$$
2. Ein Tangentialvektor $\mathbf{V}$ im Punkt $A(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ werde nun entlang des folgenden Weges auf der Kugeloberfläche parallelverschoben: (1) entlang des Längenkreises $\phi = 0$ zum Nordpol, (2) entlang des Längenkreises $\phi = \pi/2$ zurück zum Äquator, (3) entlang des Äquators zurück zum Ausgangspunkt A. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem ursprünglichen und parallelverschobenen Vektor im Punkt A. Interpretieren Sie das Resultat geometrisch.