Übungsblatt 3
Relativitätstheorie II

Sommersemester 2023
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1)

Es seien $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zwei glatte Vektorfelder auf der glatten Manigfaltigkeit M.
Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$, die einer glatten Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ die Zahl $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}f)(p) - (\mathfrak{Y}\mathfrak{X}f)(p)$ zuordnet, ein Tangentialvektor in T_pM ist.

Aufgabe 2)

Sei $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugelfläche mit dem Atlas $\{(\mathbb{S}^2 \setminus \{p_+\}, \Psi_+), (\mathbb{S}^2 \setminus \{p_-\}, \Psi_-)\}$, wobei $p_\pm := (0, 0, \pm 1)$, aus der Vorlesung (siehe Hinweis). Außerdem sei das konstante Vektorfeld $\mathbf{v}_x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (1, 0)$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben.

1. Zeigen Sie: Durch $\mathfrak{X} := (\mathrm{D}\Phi_+ \cdot \mathbf{v}_x) \circ \Psi_+$ ist (implizit) ein glattes Vektorfeld $\mathfrak{X}$ auf $\mathbb{S}^2$ definiert, wobei $\mathrm{D}\Phi_+$ die Funktionalmatrix der Abbildung $\Phi_+ = \Psi_+^{-1}$ in *kartesischen* Koordinaten ist. Berechnen Sie dazu $\mathrm{D}\Psi_\pm$, $\mathrm{D}\Phi_\pm$ und $\mathrm{D}(\Psi_\pm \circ \Phi_\mp)$, sowie die Koordinatendarstellung $\mathbf{w}_x := (\mathrm{D}\Psi_- \cdot \mathfrak{X}) \circ \Phi_-$ des Vektorfeldes $\mathfrak{X}$ in der Karte Ψ_-.

2. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathfrak{X}$ möglichst detailgetreu. Um auch am Nordpol eine gute Darstellung zu gewährleisten, skizzieren Sie zuerst $\mathbf{w}_x$. Nutzen Sie dazu, daß die Integralkurven von $\mathbf{v}_x$ Geraden sind und daß $\Phi_\pm$ und $\Psi_\pm$ verallgemeinerte Kreise bewahren.
(verallgemeinerter Kreis = Kreis oder Gerade)

3. Führen Sie die Schritte 2. und 3. in Gedanken für $\mathbf{v}_y = (0, 1)$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathbf{w}_y$ nochmals durch. Was ändert sich?

Hinweis: Die Koordinatenabbildungen $\Psi_\pm$ sind stereographische Projektionen. In kartesischen Koordinaten sind diese gegeben durch

$$\Psi_\pm \colon \mathbb{S}^2 \setminus \{p_\pm\} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{s} = (x, y, z)^{\mathrm{t}} \mapsto \left(\frac{x}{1 \mp z}, \frac{y}{1 \mp z} \right)^{\mathrm{t}}.$$

Die Umkehrabbidungen $\Phi_\pm := \Psi_\pm^{-1}$ sind gegeben durch

$$\Phi_\pm \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{p_\pm\}, \quad (x, y)^{\mathrm{t}} \mapsto \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \mp \frac{1 - (x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2} \right)^{\mathrm{t}}.$$

Aufgabe 3)

Zeigen Sie, dass die Menge der Vektoren mit $g(x,x) > 0$ in einem Lorentzraum in zwei disjunkte konvexe Kegel zerfällt.

(Hinweis: Ein konvexer Kegel ist eine Menge K von Vektoren, sodass für alle $x, y \in K$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ auch $ax + by \in K$ gilt.)